KJ-1311

B.Sc. (Part - II)

Term End Examination, 2020

MATHEMATICS

Paper - III

Mechanics

Time : Three Hours] [*Maximum Marks* : 50

नोट : प्रत्येक प्रश्न से किन्हीं **दो** भागों को हल कीजिए। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

Note : Answer any **two** parts from each question. All questions carry equal marks.

इकाई / Unit-I

1. (*a*) लंबाई l के एक समांग चैन को समान क्षैतिज रेखा में दो बिन्दुओं A तथा B से इस प्रकार लटकाया गया है ताकि प्रत्येक अन्तस्थ तनाव निम्नतम बिन्दु के तनाव का n गुणा है। दर्शाइए कि विस्तृति AB अवश्य ही

$$\left(\frac{l}{\sqrt{n^2-1}}\right)\log\left[n+\sqrt{n^2-1}\right]$$ होनी चाहिए।

A uniform chain of length l, is to be suspended from two points A and B, in the same horizontal line so that each terminal tension is n times of the tension of the lowest point. Show that the span AB must be $\left(\frac{l}{\sqrt{n^2-1}}\right)\log\left[n+\sqrt{n^2-1}\right]$.

(*b*) लंबाई a की एक डोरी चार एकसमान छड़ों के एक समचतुर्भुज के छोटे विकर्ण को बनाती है। समचतुर्भुज के प्रत्येक भुजा की लंबाई b तथा भार w है जो बंधे हुए हैं। यदि छड़ों में से एक को क्षैतिज अवस्था में टेक दिया गया हो, तो सिद्ध कीजिए कि डोरी में तनाव $\frac{2w\left(2b^2-a^2\right)}{b\sqrt{\left(4b^2-a^2\right)}}$ है।

A string of length a forms the shorter diagonal of a rhombus of four uniform rods, each of length b and weight w which are hanged together. If one of the rods be supported in a horizontal position, prove that the tension in the string is $\frac{2w\left(2b^2-a^2\right)}{b\sqrt{\left(4b^2-a^2\right)}}$.

(*c*) दो बराबर भार *P*, दो डोरियों *ACP* तथा *BCP* से बंधे हुए हैं, जो एक चिकनी खूंटी *C* के ऊपर होकर जाती है। *AB* एक भारी दंड है जिसका भार *W* है। जिसका गुरुत्व केन्द्र *A* से *a* फीट तथा *B* से *b* फीट है। दर्शाइए कि *AB* क्षैतिज से कोण

$$\tan^{-1}\left[\left(\frac{a-b}{a+b}\right)\tan\left(\sin^{-1}\frac{W}{2P}\right)\right]$$ बनाती है।

Two equal weights *P* are attached to two strings *ACP* and *BCP* passing over a smooth peg *C*. *AB* is a heavy beam of weight *W*, whose centre of gravity is *a* feet from *A* and *b* feet from *B*. Show that *AB* is inclined to the horizon at an angle $\tan^{-1}\left[\left(\frac{a-b}{a+b}\right)\tan\left(\sin^{-1}\frac{W}{2P}\right)\right]$.

इकाई / Unit-II

2. (*a*) मूल बिन्दु एवं अक्ष जो भी हो, दर्शाइए कि किसी दिए गए बल निकाय के लिए राशियां $LX + MY + NZ$ तथा $X^2 + Y^2 + Z^2$ निश्चर रहती हैं।

Whatever be the origin and axis, show that the quantities $LX + MY + NZ$ and $X^2 + Y^2 + Z^2$ remains invariant for any given system of forces.

(*b*) किसी घन की एक बिन्दुगामी कोरें *OA*, *OB* तथा *OC* हैं तथा *AA*′, *BB*′, *CC*′ तथा *OO*′ उसके विकर्ण हैं। *BC*′, *CA*′, *AB*′ तथा *OO*′ पर क्रमशः बल *X*, *Y*, *Z* तथा *R* क्रिया करते हैं। दिखाइए कि उनका केवल एक परिणामी बल है तब

$$(YZ + ZX + XY)\sqrt{3} + R(X + Y + Z) = 0$$

OA, *OB*, and *OC* are three co-terminous edges of a cube and *AA*′, *BB*′, *CC*′ and *OO*′ are diagonals. The forces *X*, *Y*, *Z* and *R* acts on the *BC*′, *CA*′, *AB*′ and *OO*′ respectively. Show that they have a single resultant force, then

$$(YZ + ZX + XY)\sqrt{3} + R(X + Y + Z) = 0$$

(*c*) दर्शाइए कि किसी भी बल निकाय की शून्य रेखाओं में से चार किसी अतिपरवलय के जनक होते हैं। दो जनकों के एक निकाय के सदस्य होते हैं तथा दो अन्य निकाय के।

Show that among the null lines of any system of forces four are generators of any hyperboloid, two belonging to one system of generators and two to the other system.

इकाई / Unit-III

3. (*a*) एक प्रक्षेप्य का क्षैतिज परास R तथा महत्तम ऊँचाई H है, तो सिद्ध कीजिए कि इसका प्रक्षेप वेग $\sqrt{\dfrac{g\left(R^2+16H^2\right)}{8H}}$ होगा।

The horizontal range of a projectile is R and the maximum height attained is H, then prove that its velocity of projection is $\sqrt{\dfrac{g\left(R^2+16H^2\right)}{8H}}$.

(*b*) एक कण P अचर वेग से एक वक्र बनाता है। तथा किसी नियत बिन्दु O के सापेक्ष इसका कोणीय वेग इसकी O से दूरी के व्युत्क्रमानुपाती है। सिद्ध कीजिए वक्र एक समान कोणीय सर्पिल है।

A particle P describes a curve with constant velocity and its angular velocity about a given fixed point O varies inversely as its distance from O. Show that the curve is an equiangular spiral.

(*c*) एक कण सरल आवर्त गति में गति कर रहा है और एक विराम की स्थिति से दूसरे विराम की स्थिति तक भ्रमण करते हुए तीन क्रमागत सेकेंडों में पथ के मध्य बिन्दु से दूरियाँ क्रमश: x_1, x_2, x_3 है। सिद्ध कीजिए कि एक पूरी परिक्रमा का समय $\dfrac{2\pi}{\cos^{-1}\left(\dfrac{x_1 + x_3}{2x_2}\right)}$ है।

A particle is moving with S.H.M. and while making an excursion from one position of rest to the other; its distances from the middle point of its path at three consecutive seconds and observed to be x_1, x_2, x_3. Prove that the time of a complete revolution is $\dfrac{2\pi}{\cos^{-1}\left(\dfrac{x_1 + x_3}{2x_2}\right)}$.

इकाई / Unit-IV

4. (*a*) एक कण पृथ्वी के पृष्ठ से वगे V से प्रक्षिप्त किया जाता है। यदि गुरुत्व में कमी विचारणीय है परंतु हवा का प्रतिरोध उपेक्षणीय है, तो दर्शाइए कि पथ एक दीर्घवृत्त है जिसका दीर्घांक्ष

$\dfrac{2ga^2}{2ga - V^2}$ जहां a पृथ्वी की त्रिज्या है।

A particle is projected from the earth's surface with velocity V. Show that if the dimunitions of gravity is taken into account but the resistance of the air neglected the path is an ellipse of major axis $\dfrac{2ga^2}{2ga - V^2}$, where a is the earth's radius.

(*b*) एक बिन्दु समतल कण पर इस प्रकार गतिमान है कि उनका स्पर्शरेखीय तथा अभिलांबिक त्वरण बराबर है। तथा स्पर्श रेखा का कोणीय वेग अचर है। दर्शाइए कि वक्र का समीकरण $S = A \cdot e^{\psi} + B$ होगा। जहां A, B अचर है।

A point moves in a plane curve, so that its tangential and normal accelerations are equal and the angular velocity of the tangent is constant. Show that the equation of curve $S = A \cdot e^{\psi} + B$, where A, B are constants.

(*c*) एक कण जिस पर कोई बल क्रिया नहीं कर रहा है। रूक्ष गोले के आंतरिक पृष्ठ के अनुदिश प्रक्षिप्त किया जाता है। दर्शाइए कि यह $\frac{d}{\mu V}\left(e^{2\mu\pi}-1\right)$ समय पश्चात प्रक्षेप बिन्दु पर वापिस लौट आएगा। जहां a गोले की त्रिज्या, प्रक्षेप वेग V तथा μ घर्षण गुणांक है।

A particle is projected along the inner surface of a rough sphere and is acted on by no forces. Show that it will return to the point of projection at the end of time $\frac{d}{\mu V}\left(e^{2\mu\pi}-1\right)$, where a is the radius of sphere, V is the velocity of projection and μ be the coefficent of friction.

इकाई / Unit-V

5. (*a*) कोई कण किसी चिकने क्षैतिज समतल के अनुगत वेग V प्रक्षिप्त किया जाता है माध्यम का अवरोध प्रति इकाई द्रव्यमान वेग के घन का μ गुणा है। दर्शाइए कि कण द्वारा t समय में चली दूरी $\frac{1}{\mu V}\left[\sqrt{\left(1+2\mu V^2 t\right)}-1\right]$ तथा इसका वेग $\frac{V}{\sqrt{1+2\mu V^2 t}}$ है।

A particle is projected with velocity V along a smooth horizontal plane in a medium whose resistance per unit must be μ times the cube of the velocity. Show that the distance it has described in time t is $\frac{1}{\mu V}\left[\sqrt{\left(1+2\mu V^2 t\right)}-1\right]$ and that its velocity then is $\frac{V}{\sqrt{1+2\mu V^2 t}}$.

(*b*) एक कण अवरोधी माध्यम में गति कर रहा है पर एक केन्द्रीय बल $\frac{\mu}{r^n}$ क्रिया कर रहा है यदि पथ कोण α का एक समकोणीय सर्पिल, जिसका ध्रुव बल के केन्द्र पर है, तो दर्शाइए कि अवरोध $\frac{n-3}{2} \cdot \frac{\mu \cos \alpha}{r^n}$ है।

A particle moving in a resisting medium is acted upon by a central force $\frac{\mu}{r^n}$, if the path be an equiangular spiral of angle α whose pole is at the centre of force, show that the resistance is $\frac{n-3}{2} \cdot \frac{\mu \cos \alpha}{r^n}$.

(*c*) एक द्रव्यमान त्रिज्या C के ठोस बेलन के रूप में है इस पर कोई बल क्रिया नहीं कर रहा है। यह अपने अक्ष के समांतर महीन धूलि के एक समान बादल जिसका आयतन घनत्व ρ है विराम में है, में से होकर गति करता है। यदि धूलि के कण जो द्रव्यमान के संपर्क में

आते हैं, इससे चिपक जाते हैं। और यदि गति के प्रारंभ में द्रव्यमान m तथा वेग u हो, तो सिद्ध कीजिए कि t समय में इसका वेग निम्न होगा

$$\nu = \frac{um}{\sqrt{m^2 + 2\pi C^2 \cdot \rho u.m.t}}$$

A mass in the form of a solid cylinder of radius C, acted uopn by no forces, more parallel to its axis through a uniform cloud of fine dust of volume density ρ, which is at rest. If the particle of dust which meet the mass adhere to it and if m and u be the mass and velocity at the beginning of motion, then prove that velocity at time t is

$$\nu = \frac{um}{\sqrt{m^2 + 2\pi C^2 \cdot \rho u.m.t}}.$$

———